Acoustique

Exercice 3-02 : extensomètre à corde vibrante

1. Soit une corde de section S, de masse volumique ρ, tendue entre deux points distants de L et soumise à une force F.

Montrer que la fréquence de vibration du mode fondamental est : $\boxed{f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}}$

2. Quand une corde est soumise à une force F, elle subit un allongement ΔL tel que :

$$\boxed{\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{S}}$$

E est le module d'Young.

A.N. Soit une corde en acier de section S = 0,2 mm², de tension F = 208 N et de longueur au repos L = 206 mm.
Calculer son allongement ΔL (en mm).
On donne : E = $2{,}1\cdot10^{11}$ N/m² (module d'Young de l'acier).

3. Vérifier que : $\boxed{f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}\cdot\frac{\Delta L}{L}}}$

Faire l'application numérique.
On donne : ρ = 7700 kg/m^3 (masse volumique de l'acier).

4. Application : extensomètre à corde vibrante

Ce type d'extensomètre est constitué d'une corde en acier tendue entre deux supports qui sont ancrés dans la structure dont on étudie les déformations.
En pratique, on l'utilise pour la surveillance de barrages, ponts, tunnels…

Soit ΔL_0 l'allongement initial de la corde : la fréquence correspondante est alors f_0.
La déformation de la structure modifie l'allongement de la corde qui devient ΔL_1 (fréquence f_1).

Montrer que l'allongement de la corde dû à la déformation de la structure est : $\boxed{\frac{4L^3\rho}{E}\left(f_1{}^2 - f_0{}^2\right)}$

A.N. On mesure f_0 = 892 Hz et f_1 = 1058 Hz.
En déduire la déformation de la structure (en mm).

Eléments de correction

1. Formule des cordes (mode fondamental) : $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

μ est la masse linéaire de la corde : μ = ρS

Finalement : $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}$

2. $\Delta L = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{S}\cdot L = \frac{1}{2{,}1\cdot10^{11}}\cdot\frac{208}{0{,}2\cdot10^{-6}}\cdot 0{,}206 = 1{,}02 \text{ mm}$

3. $f = \frac{1}{2\cdot 0{,}206}\sqrt{\frac{2{,}1\cdot10^{11}}{7700}\cdot\frac{1{,}02\cdot10^{-3}}{0{,}206}} = 892 \text{ Hz}$

4. $f_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}\cdot\frac{\Delta L_0}{L}}$ d'où : $\Delta L_0 = \frac{4L^3\rho f_0{}^2}{E}$

De même : $\Delta L_1 = \frac{4L^3\rho f_1{}^2}{E}$

$$\Delta L_1 - \Delta L_0 = \frac{4L^3\rho}{E}\left(f_1{}^2 - f_0{}^2\right)$$

$$\frac{4\cdot 0{,}206^3\cdot 7700}{2{,}1\cdot10^{11}}\left(1058^2 - 892^2\right) = 0{,}42 \text{ mm}$$