# ▪ SYSTEME DU PREMIER ORDRE
# ▪ RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS
# ▪ APPLICATION EN SCIENCES PHYSIQUES

**VERSION 1.0.5**

## I- Equations différentielles du premier ordre à coefficients constants

On s'intéresse aux équations différentielles du $1^{er}$ ordre du type : $\boxed{\tau \cdot \frac{df(t)}{dt} + f(t) = f_\infty}$

avec la condition initiale : $f(t = 0) = f_0$

- $f(t)$ est une fonction d'une variable t

  En pratique, f représente une grandeur physique (tension électrique, vitesse, température …).
  t désigne le temps (en seconde).

- $\frac{df(t)}{dt}$ ou $f'(t)$ ou $\dot{f}$ est la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t
- $\tau$ (tau) est la **constante de temps** du système (en seconde)
- $f_\infty$ est une constante : elle correspond à la valeur finale $f(t \to \infty)$
- $f_0$ est une constante : elle correspond à la valeur initiale $f(t = 0)$

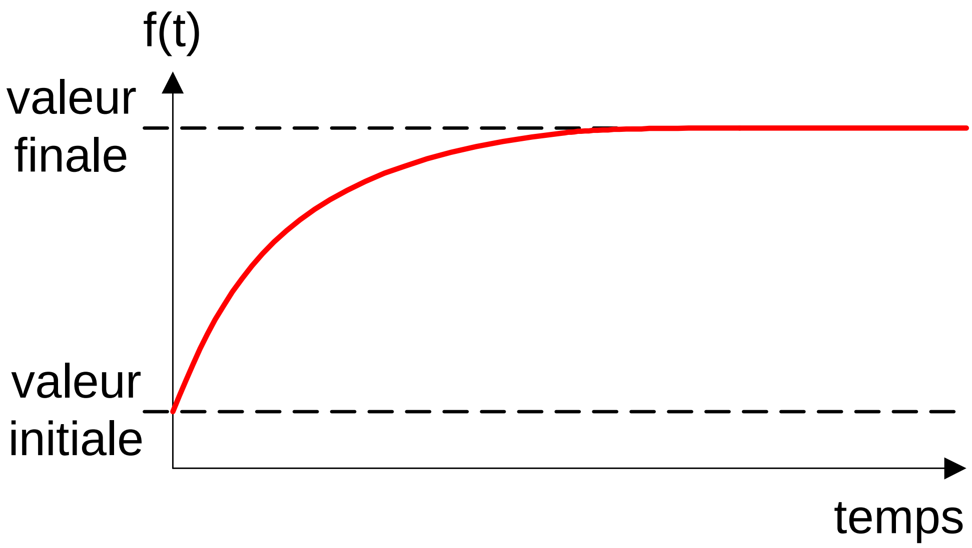
Ce type d'équation est très courant en sciences physiques : il caractérise les « systèmes du $1^{er}$ ordre ».

### I-1- Solution de l'équation différentielle

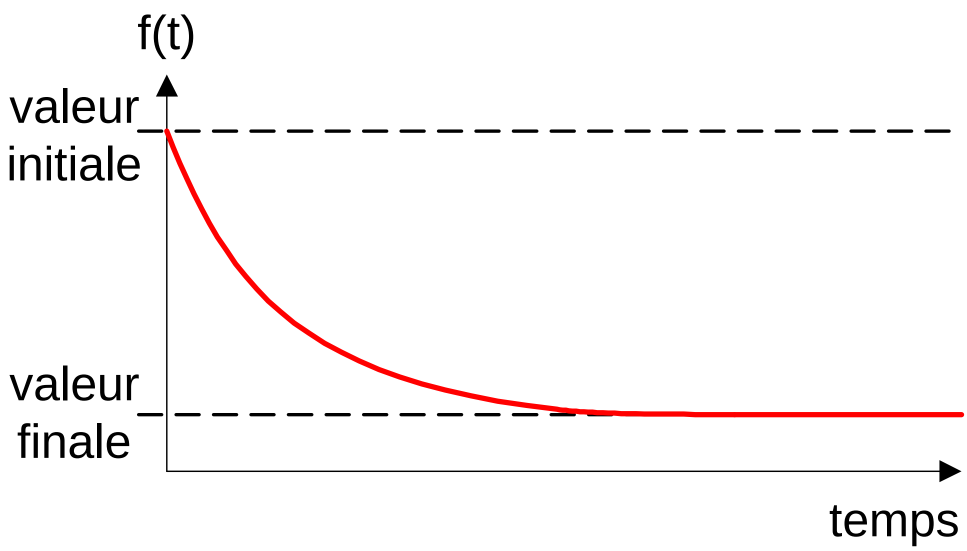
$$\boxed{f(t) = f_\infty - (f_\infty - f_0)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

### I-2- Allure de la courbe

On suppose $\tau > 0$ (système stable).

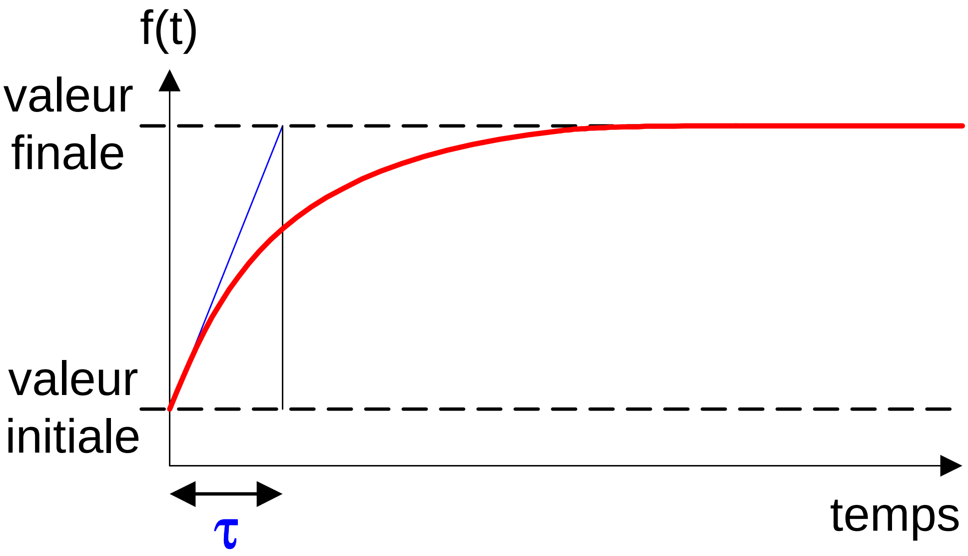



Si la valeur finale est inférieure à la valeur initiale :

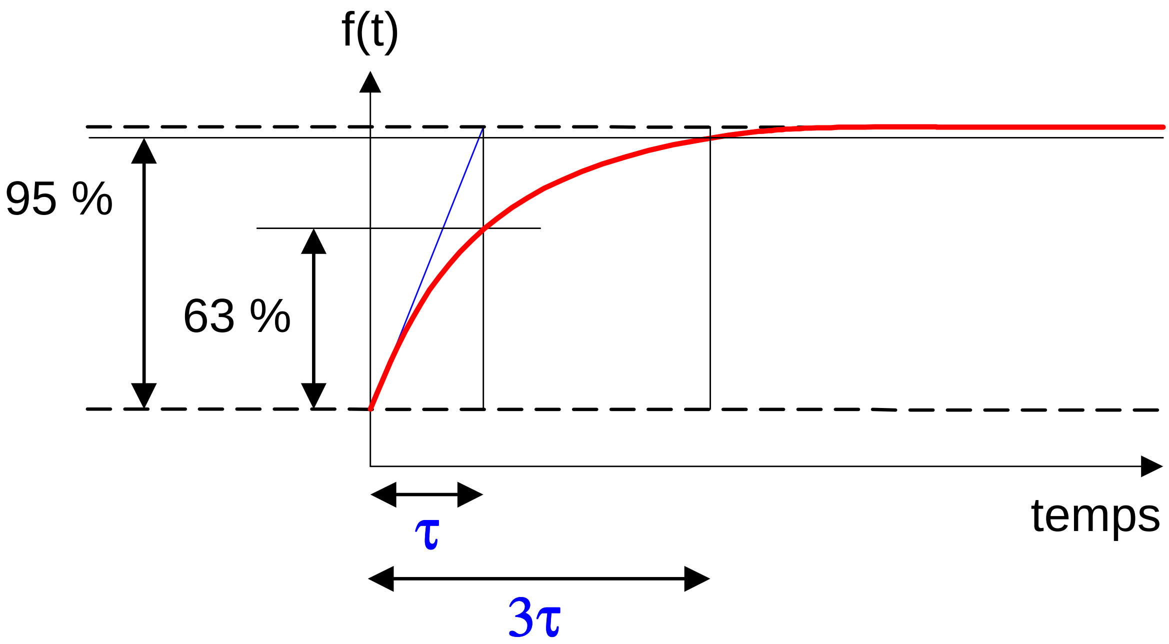



### I-3- Propriétés de la courbe

Graphiquement, la constante de temps $\tau$ apparaît de la manière suivante :

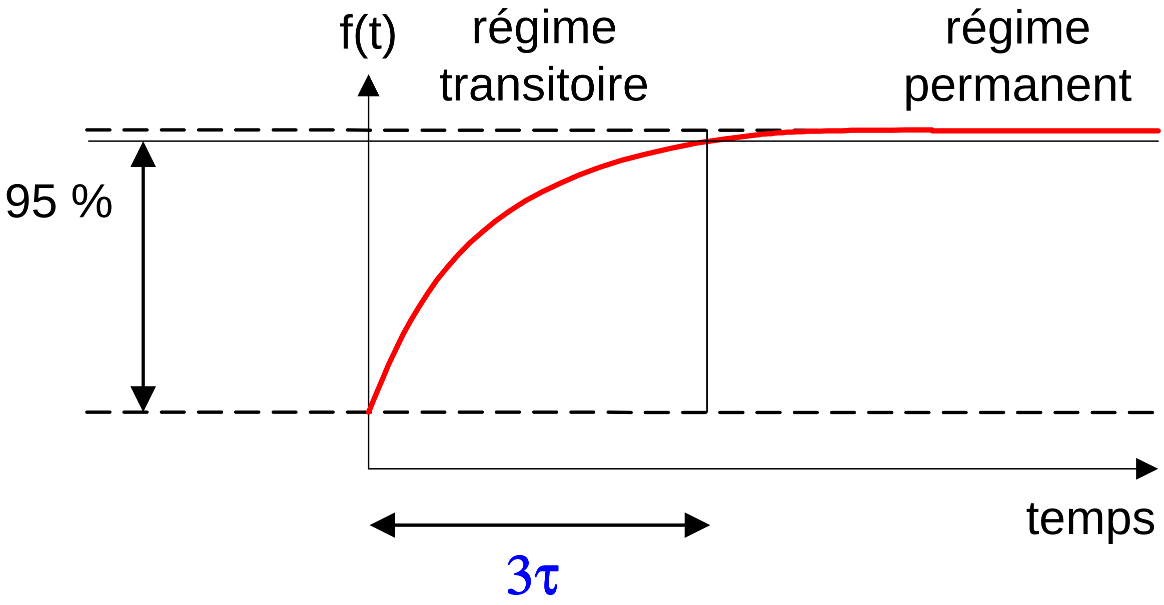



Remarque : quand t << τ, la courbe est assimilable à une droite.




| durée | valeur relative |
|---|---|
| 0 | 0 % (valeur initiale) |
| 0,01τ | 1 % |
| 0,1τ | 10 % |
| τ | 63 % |
| 2τ | 86 % |
| 3τ | 95 % |
| 5τ | 99,3 % |
| 10τ | 99,995 % |
| ∞ | 100 % (valeur finale) |

On a l'habitude de dire que le régime transitoire dure 3τ (c'est une façon de parler car la durée du régime transitoire est … infinie).
Autrement dit, le régime permanent est atteint après 3τ.
On parle aussi de temps de réponse à 5 % :



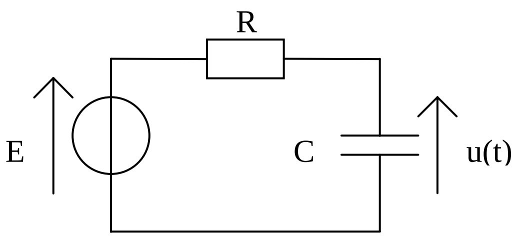

### I-4- Relation utile

$$t = \tau \cdot \ln\left(\frac{f_\infty - f_0}{f_\infty - f(t)}\right)$$

$$= \text{constante de temps} \times \text{logarithme népérien}\left(\frac{\text{valeur finale - valeur initiale}}{\text{valeur finale - valeur à l'instant t}}\right)$$

## II- Exemple d'application : circuit électrique RC

u(t) est la tension électrique aux bornes d'un condensateur C = 1 µF alimenté à travers une résistance R = 10 kΩ par une source de tension constante E = 5 V.




Les lois de l'Electricité donnent :

$$\boxed{RC\frac{du(t)}{dt}+u(t)=E}$$

Le condensateur est initialement chargé :
A l'instant t = 0 : u(t = 0) = 2 V.

Cherchons la loi d'évolution de la tension électrique u(t) :

L'équation est du type : $\tau\cdot\frac{df(t)}{dt}+f(t)=f_\infty$

Les coefficients de l'équation différentielle donnent directement :

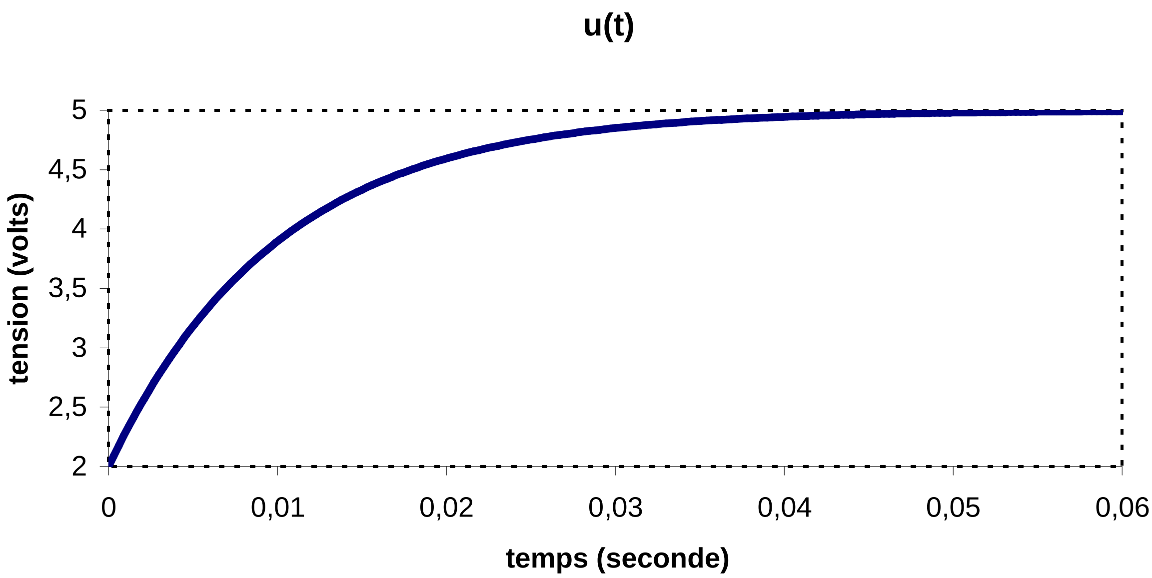
- La constante de temps du circuit : **τ = RC = 10 ms**
- La valeur finale de la tension : **u(t → ∞) = E = 5 volts**

La solution de l'équation est :

$$u(t)=u_\infty-(u_\infty-u_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(t)=5-(5-2)e^{-\frac{t}{RC}}=5-3\cdot e^{-\frac{t}{0,01}}$$

Graphiquement :




Question 1 : que vaut la tension du condensateur à l'instant t = 10 ms ?

$\tau$ = RC = 10 ms
63 % de 3 V (= 5 – 2 V) = 1,89 V
2 + 1,89 V = **3,89 V**

Autre méthode : $u(t) = 5 - 3 \cdot e^{-\frac{t}{0,01}} = 5 - 3 \cdot e^{-\frac{0,01}{0,01}} = 3,896\,\text{V}$

Question 2 : à quel instant la tension du condensateur vaut-elle 4,5 volts ?

Réponse :

$$t = \tau \cdot \ln\left(\frac{u_\infty - u_0}{u_\infty - u(t)}\right) = \tau \cdot \ln\left(\frac{5-2}{5-4,5}\right) = \tau \cdot \ln(6) = 1,8 \cdot \tau = 18\,\text{ms}$$

Question 3 : à quel instant la tension du condensateur vaut-elle 4,85 volts ?

Réponse : 3$\tau$ = 30 ms

Cela peut se faire sans calcul en remarquant que 2,85 V (= 4,85 – 2 V) correspond à 95 % de 3 V (= 5 – 2 V).