▪ SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE
▪ RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU DEUXIEME ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS
▪ APPLICATION EN SCIENCES PHYSIQUES

VERSION 1.0.8

I- Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse aux équations différentielles du 2ème ordre du type :

$$\boxed{\left(\frac{1}{{\omega_0}^2}\right)\cdot\frac{d^2g(t)}{dt^2}+\left(\frac{2m}{\omega_0}\right)\cdot\frac{dg(t)}{dt}+g(t)=g_\infty}$$

On suppose le système initialement au repos :

$$\begin{cases} g(t=0)=0 \\ \dfrac{dg(t=0)}{dt}=0 \end{cases}$$

- g(t) est une fonction d'une variable t

  En pratique, g représente une grandeur physique (tension électrique, vitesse, température …).
  t désigne le temps (en seconde).

- $\frac{dg(t)}{dt}$ ou $g'(t)$ ou $\dot{g}$ est la dérivée de la fonction g par rapport à la variable t
- $\frac{d^2g(t)}{dt^2}$ ou $g''(t)$ ou $\ddot{g}$ est la dérivée deuxième de la fonction g par rapport à la variable t
- m est le coefficient d'amortissement du système (sans unité) ; m > 0 pour un système stable

- ω_0 est la pulsation propre du système (en radians par seconde)
  $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$ est la fréquence propre du système (en hertz)
- g_∞ est une constante : elle correspond à la valeur finale $g(t\to\infty)$

Ce type d'équation est très courant en sciences physiques : il caractérise les « systèmes du 2ème ordre ».

I-1- Résolution

Equation caractéristique : $\left(\frac{1}{\omega_0{}^2}\right)r^2+\left(\frac{2m}{\omega_0}\right)r+1=0$

Discriminant : $\Delta=\left(\frac{2m}{\omega_0}\right)^2-\frac{4}{\omega_0{}^2}=\frac{4(m^2-1)}{\omega_0{}^2}$

I-1-1- Premier cas : $\Delta > 0$

m > 1 ou bien m < -1

Racines de l'équation caractéristique :

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{-\frac{2m}{\omega_0}+\sqrt{\Delta}}{\frac{2}{\omega_0{}^2}}=\dfrac{-\frac{2m}{\omega_0}+\frac{2\sqrt{m^2-1}}{\omega_0}}{\frac{2}{\omega_0{}^2}}=\omega_0\left(-m+\sqrt{m^2-1}\right) \\ r_2=\omega_0\left(-m-\sqrt{m^2-1}\right) \end{cases}$$

Solution générale de l'équation différentielle : $g(t)=A\cdot e^{r_1\cdot t}+B\cdot e^{r_2\cdot t}+g_\infty$

m > 1 $\Rightarrow$ $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$ $\Rightarrow$ système stable (régime apériodique)
m < -1 $\Rightarrow$ $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ $\Rightarrow$ système instable

A et B sont deux constantes qui dépendent des conditions initiales :

$$\begin{cases} g(t=0)=0 \\ \dfrac{dg(t=0)}{dt}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+g_\infty=0 \\ A\cdot r_1+B\cdot r_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-g_\infty\dfrac{r_2}{r_2-r_1} \\ B=g_\infty\dfrac{r_1}{r_2-r_1} \end{cases}$$

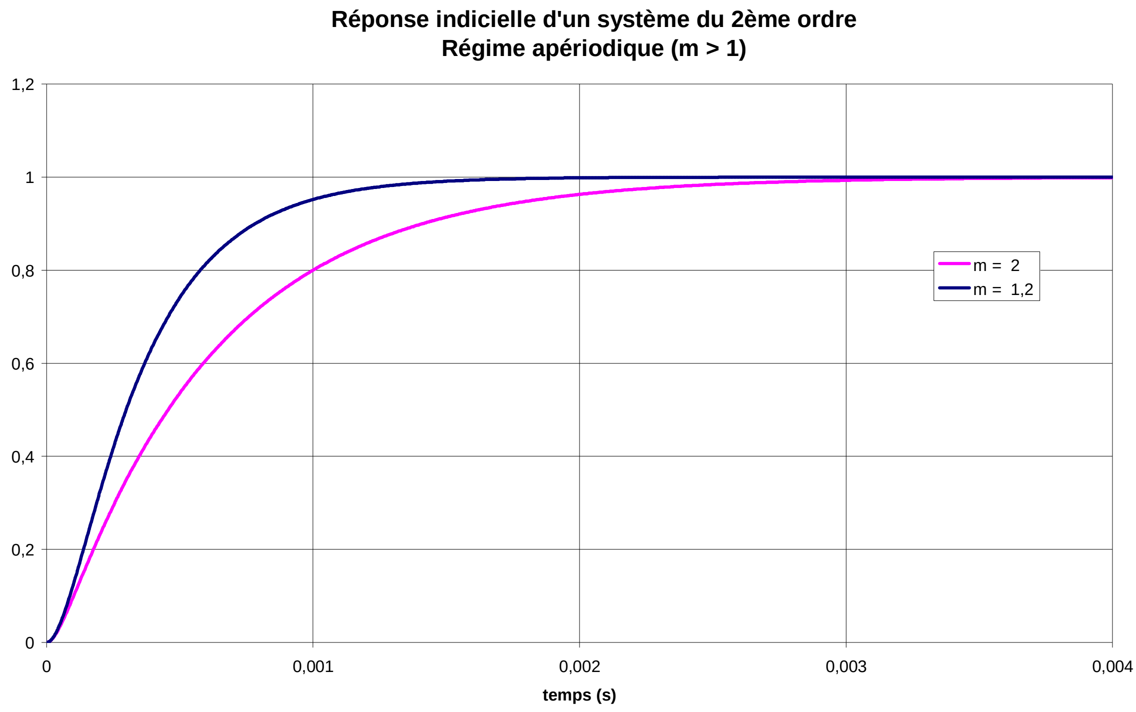
En définitive :

$$g(t)=-g_\infty\frac{r_2}{r_2-r_1}\cdot e^{r_1\cdot t}+g_\infty\frac{r_1}{r_2-r_1}\cdot e^{r_2\cdot t}+g_\infty$$

$$g(t)=g_\infty\left(1-\frac{r_2\cdot e^{r_1\cdot t}-r_1\cdot e^{r_2\cdot t}}{r_2-r_1}\right)$$

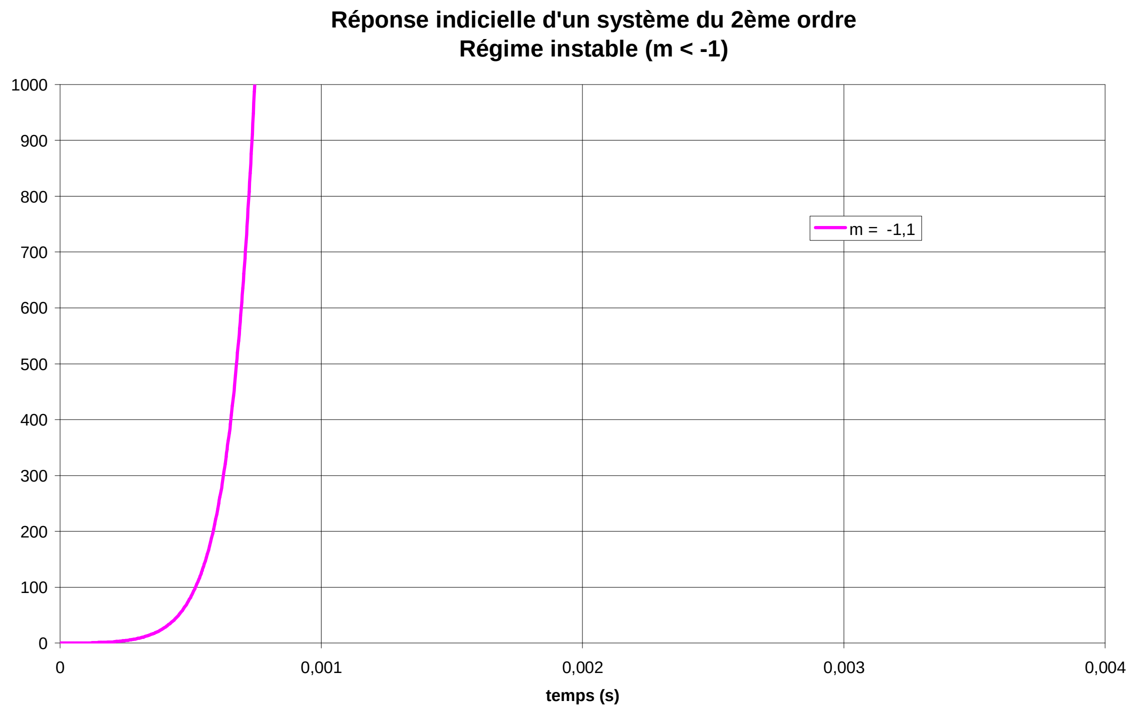
$$\boxed{g(t)=g_\infty\left(1+\frac{(-m-\sqrt{m^2-1})\cdot e^{\omega_0(-m+\sqrt{m^2-1})\cdot t}-(-m+\sqrt{m^2-1})\cdot e^{\omega_0(-m-\sqrt{m^2-1})\cdot t}}{2\sqrt{m^2-1}}\right)}$$

(valable pour m > 1 ou bien m < -1)



($\omega_0 = 2\pi \times 1000$ rad/s)

N.B. On parle de « réponse indicielle » ou « réponse unitaire » quand la valeur finale est 1.



($\omega_0 = 2\pi \times 1000$ rad/s)

I-1-2- Deuxième cas : $\Delta < 0$

$-1 < m < 1$

L'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées : $r_{1,2} = \alpha \pm \beta j$

$$\text{avec : } \begin{cases} \alpha = -\dfrac{\dfrac{2m}{\omega_0}}{\dfrac{2}{\omega_0^{\,2}}} = -m \cdot \omega_0 \\ \beta = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{1-m^2}}{\omega_0}}{\dfrac{2}{\omega_0^{\,2}}} = \sqrt{1-m^2} \cdot \omega_0 \end{cases}$$

Solution générale de l'équation différentielle : $g(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\beta \cdot t) + B \cdot \sin(\beta \cdot t)] + g_\infty$

$0 < m < 1 \Rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow$ système stable
(régime pseudo-périodique de pulsation : $\sqrt{1-m^2} \cdot \omega_0$)
$m = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$ système oscillant (pulsation ω_0)
$-1 < m < 0 \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow$ système instable

A et B sont deux constantes qui dépendent des conditions initiales :

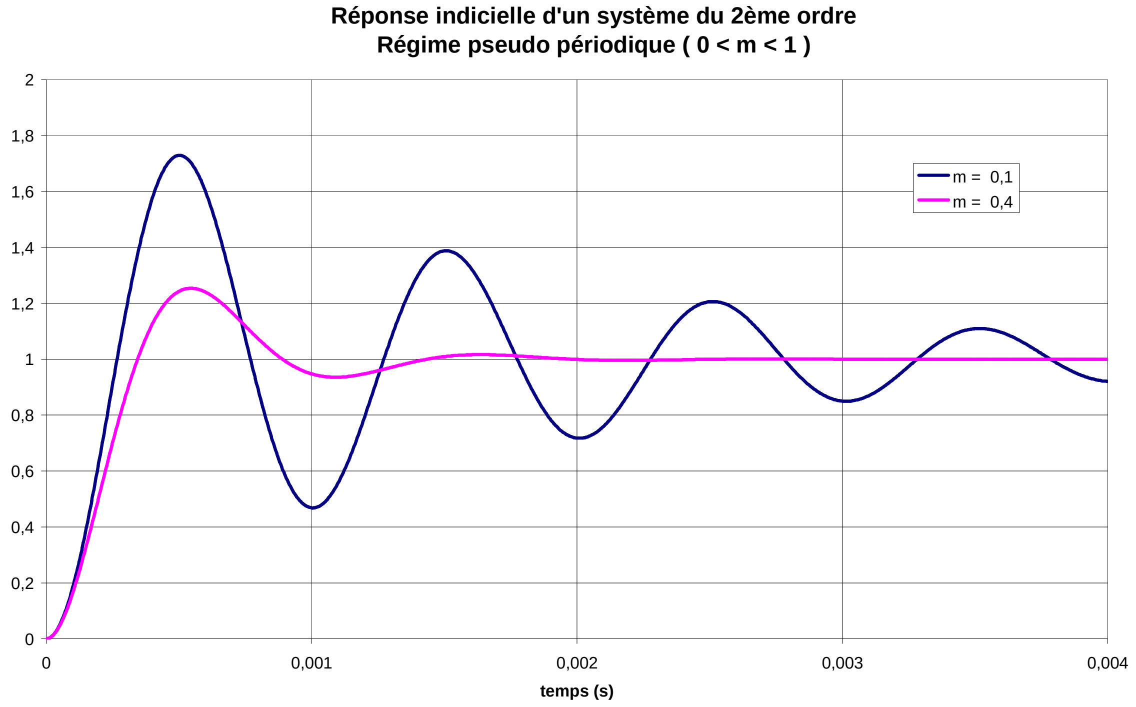
$$\begin{cases} g(t=0) = 0 \\ \dfrac{dg(t=0)}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + g_\infty = 0 \\ \alpha A + \beta B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -g_\infty \\ B = g_\infty \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

En définitive :

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{\alpha \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\beta \cdot t) + B \cdot \sin(\beta \cdot t)] + g_\infty \\ &= g_\infty \left(1 - e^{\alpha \cdot t} \left(\cos(\beta \cdot t) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta \cdot t) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{g(t) = g_\infty \left(1 - e^{-m \cdot \omega_0 \cdot t} \left(\cos\left(\sqrt{1-m^2} \cdot \omega_0 \cdot t\right) + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin\left(\sqrt{1-m^2} \cdot \omega_0 \cdot t\right) \right) \right)}$$

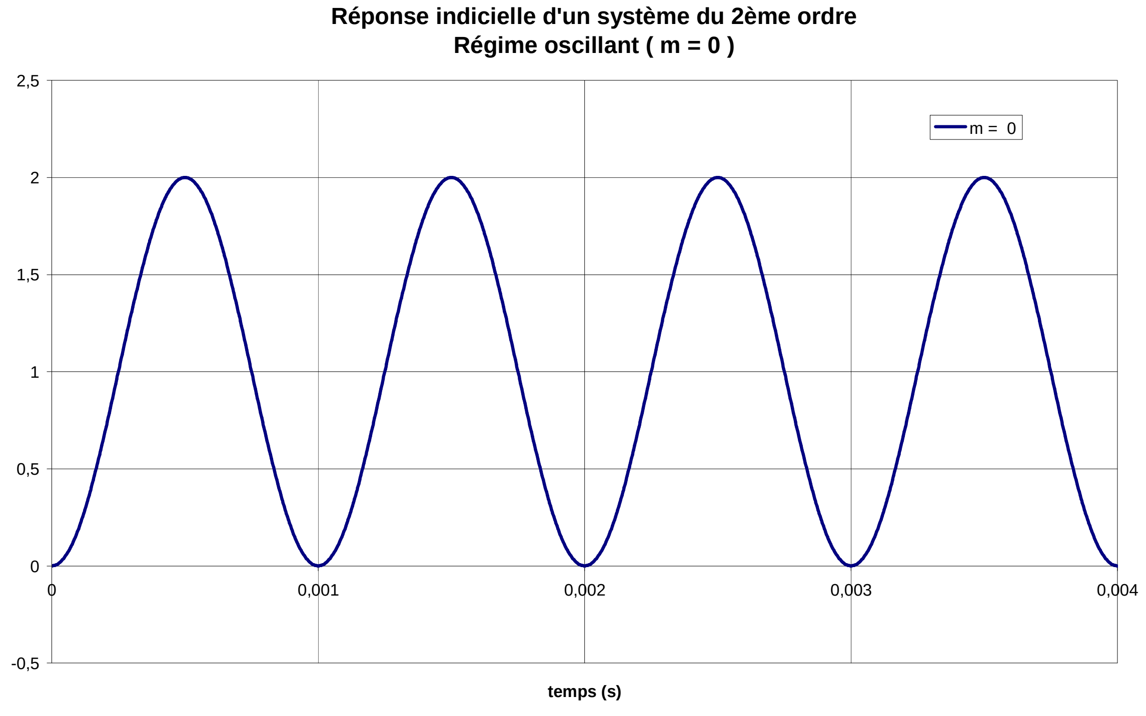
(valable pour $-1 < m < 1$)



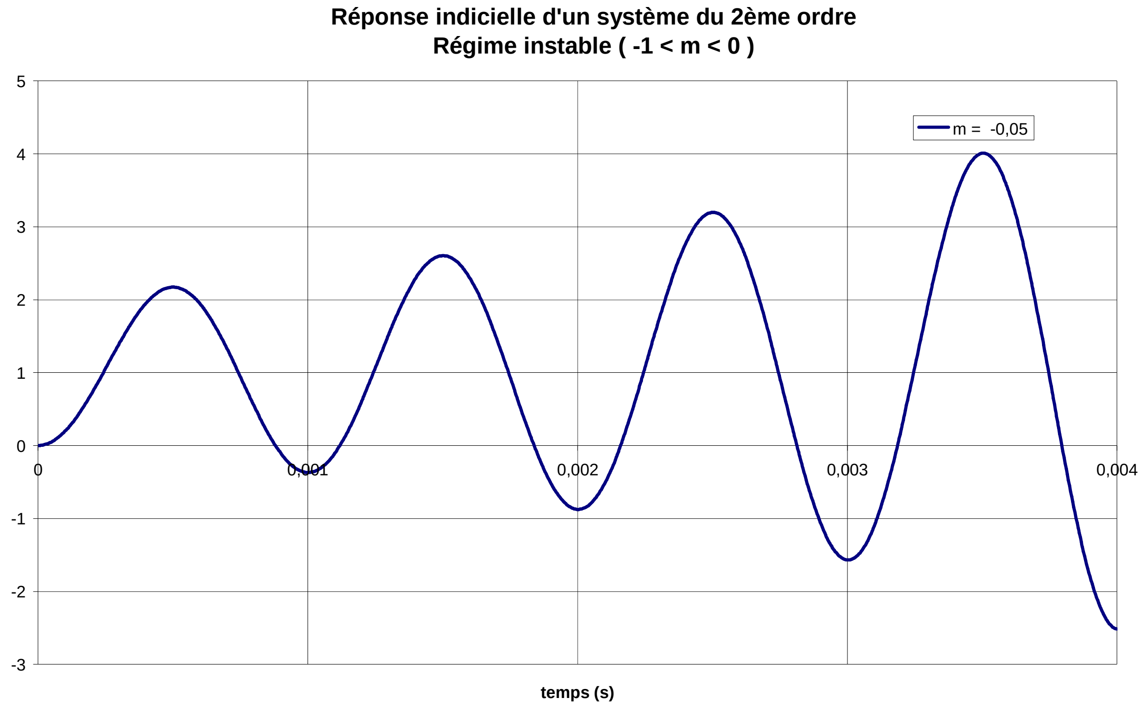
$(\omega_0 = 2\pi \times 1000 \text{ rad/s})$

m = 0 : système oscillant de pulsation ω_0

$$\boxed{g(t) = g_\infty(1-\cos(\omega_0 \cdot t))}$$



$(\omega_0 = 2\pi \times 1000 \text{ rad/s})$



($\omega_0 = 2\pi \times 1000$ rad/s)

I-1-3- Troisième cas : $\Delta = 0$

m = 1 ou m = -1

L'équation caractéristique a une racine double réelle r :

$$r = \frac{-\frac{2m}{\omega_0}}{\frac{2}{\omega_0^{\ 2}}} = -m \cdot \omega_0$$

La solution générale est : $g(t) = (A \cdot t + B) \cdot e^{r \cdot t} + g_\infty$

m = 1 $\Rightarrow$ r < 0 $\Rightarrow$ système stable (régime « critique »)
m = -1 $\Rightarrow$ r > 0 $\Rightarrow$ système instable

A et B sont deux constantes qui dépendent des conditions initiales :

$$\begin{cases} g(t=0) = 0 \\ \dfrac{dg(t=0)}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + g_\infty = 0 \\ A + B \cdot r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -g_\infty \\ A = g_\infty \cdot r \end{cases}$$

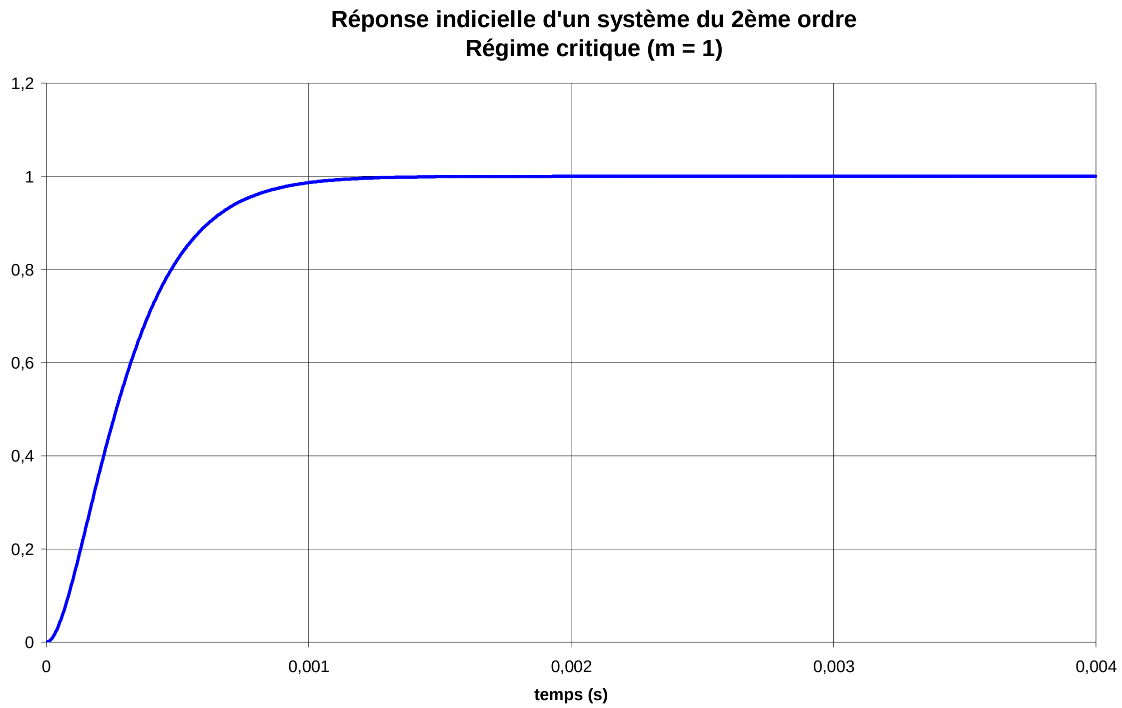
En définitive :

$$g(t) = (A \cdot t + B) \cdot e^{r \cdot t} + g_\infty$$
$$= g_\infty \left(1 - (1 - r \cdot t) \cdot e^{r \cdot t}\right)$$

$$\boxed{g(t) = g_\infty \left(1 - (1 + m \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-m \cdot \omega_0 \cdot t}\right)}$$

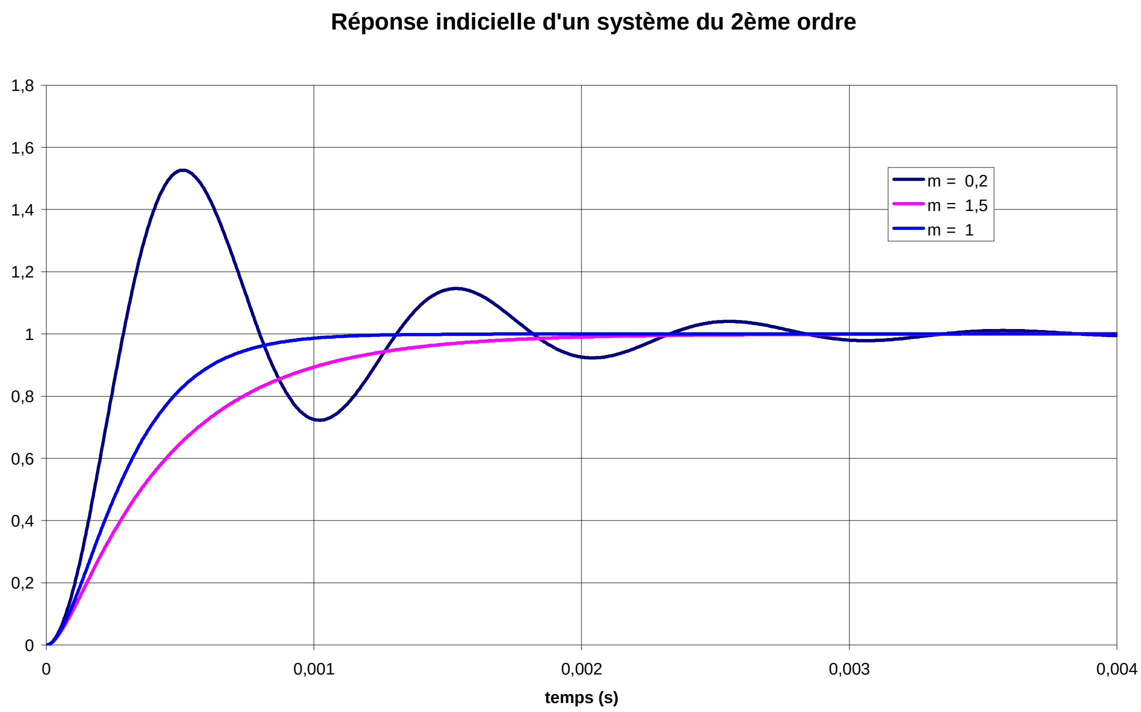
(valable pour m = 1 ou -1)

m = 1 (régime critique) : $\boxed{g(t) = g_\infty \left(1 - (1 + \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 \cdot t}\right)}$



($\omega_0 = 2\pi \times 1000$ rad/s)

Le régime critique fait la transition entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique :



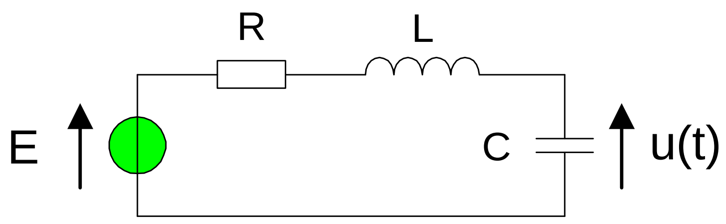
$(\omega_0 = 2\pi \times 1000 \text{ rad/s})$

I-2- En résumé

Coefficient d'amortissement m	**Régime**
$0 < m < 1$	Pseudo-périodique (pulsation : $\sqrt{1-m^2} \cdot \omega_0$)
$m = 1$	Critique
$m > 1$	Apériodique
$m = 0$	Régime oscillant (pulsation ω_0)
$m < 0$	Instable

II - Exemple d'application : circuit électrique RLC

u(t) est la tension électrique aux bornes d'un condensateur C = 100 nF alimenté à travers une résistance R = 100 Ω et une bobine d'inductance L = 100 mH par une source de tension constante E = 10 V :



Les lois de l'Electricité donnent :

$$\boxed{LC\frac{d^2u(t)}{dt^2}+RC\frac{du(t)}{dt}+u(t)=E}$$

On suppose le condensateur initialement déchargé et le courant nul :

$$\begin{cases} u(t=0)=0 \\ \dfrac{du(t=0)}{dt}=0 \end{cases}$$

Cherchons la loi d'évolution de la tension électrique u(t) :

L'équation est du type : $\left(\frac{1}{\omega_0{}^2}\right)\cdot\frac{d^2g(t)}{dt^2}+\left(\frac{2m}{\omega_0}\right)\cdot\frac{dg(t)}{dt}+g(t)=g_\infty$

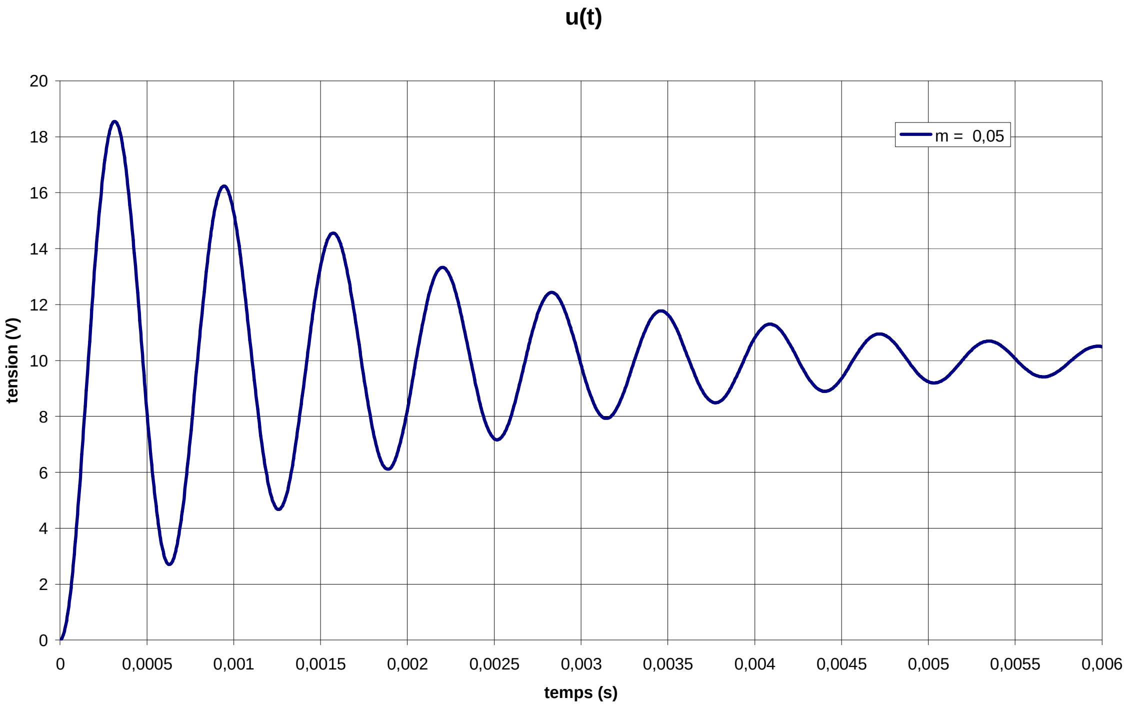
Les coefficients de l'équation différentielle donnent directement :

- La pulsation propre du circuit : $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=10\,000\ \text{rad/s}$
- Le coefficient d'amortissement : $m=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}=0{,}05$
- La valeur finale de la tension : $u(t\to\infty)$ = E = 10 volts

0 < m < 1 donc nous sommes en régime pseudo-périodique.
La pseudo-période est :

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{1-m^2}\cdot\omega_0}\approx\frac{2\pi}{\omega_0}\approx 628\,\mu s$$

Graphiquement :



(C) Fabrice Sincère