RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES
APPLICATION EN SCIENCES PHYSIQUES

Sommaire

I- Equations différentielles du premier ordre

On s'intéresse aux équations du type : **a·f '(t) + f(t) = g(t)**

avec :

- f(t) une fonction d'une variable réelle t
- $f'(t) = \frac{df}{dt} = \dot{f}$ la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t
- g(t) une fonction d'une variable réelle t
- a une constante réelle ($a \neq 0$)

I-1- Résolution

a et g(t) étant données, le problème est de trouver la ou les fonctions f(t) qui vérifient l'équation différentielle.

La résolution se fait en deux parties :

a) Recherche de la ***solution de l'équation homogène associée*** : a·f '(t) + f(t) = 0
(c'est l'équation sans second membre)

En mathématique, on montre que la solution de l'équation a·f '(t) + f(t) = 0 est :

$$f(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{a}}$$

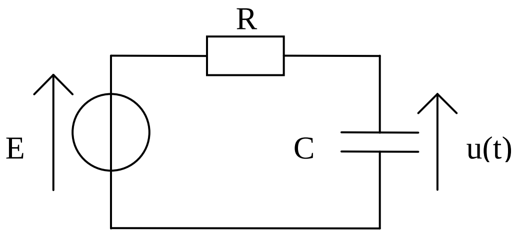
avec k une constante qui dépend des conditions initiales.

b) Recherche d'une ***solution particulière*** de l'équation générale : a·f '(t) + f(t) = g(t)
(c'est l'équation avec second membre)

La ***solution générale*** est la somme de la solution de l'équation homogène associée et de la solution particulière.

I-2- Exemple de résolution : circuit électrique

u(t) est la tension électrique aux bornes d'un condensateur C alimenté à travers une résistance R sous une tension constante E :



Les lois de l'Electricité indiquent que : $RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$

Cherchons maintenant la loi d'évolution de la tension électrique u(t) :

- Recherche de la solution de l'équation homogène associée : $RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$

  $u(t)_{\text{homogène}} = k \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

  avec k une constante qui dépend des conditions initiales.

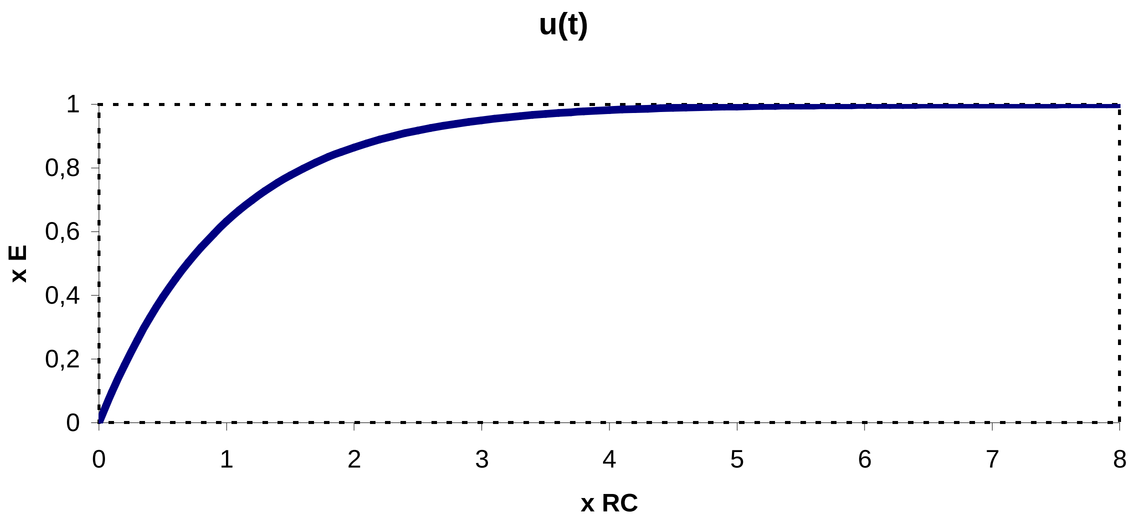
- Recherche de la solution particulière de l'équation générale : $RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$

  $u(t)_{\text{ particulière}} = E$

- Solution générale : $u(t) = u(t)_{\text{homogène}} + u(t)_{\text{ particulière}} = k \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E$

En prenant comme condition initiale u(t = 0) = 0 V (condensateur déchargé) alors : k = - E

Finalement : $\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$



Remarques

τ = RC est la ***constante de temps*** du circuit électrique.
Après 3τ, le condensateur est chargé à 95 %.

La solution particulière correspond au régime permanent : $u(t \to \infty) = E$
(le condensateur est chargé à 100 %).

La solution de l'équation homogène correspond au régime transitoire : $u(t)_{homogène} = -E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

On vérifie que le régime transitoire disparaît :

$u(t \to \infty)_{homogène} \to 0$ V

II- Equations différentielles du second ordre

On s'intéresse aux équations du type : **$a \cdot f''(t) + b \cdot f'(t) + c \cdot f(t) = g(t)$**

avec :

- f(t) une fonction d'une variable réelle t
- $f'(t) = \frac{df}{dt} = \dot{f}$ la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t
- $f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \ddot{f}$ la dérivée deuxième de la fonction f par rapport à la variable t
- g(t) une fonction d'une variable réelle t
- a, b et c des constantes réelles $(a \neq 0)$

II-1- Résolution

Comme précédemment, la solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière.

a) Recherche de la solution de l'équation homogène associée : $a \cdot f''(t) + b \cdot f'(t) + c \cdot f(t) = 0$

On définit ***l'équation caractéristique*** : $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$ dont il faut chercher les racines.

Trois possibilités se présentent suivant la valeur du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

  La solution est alors : $f(t)_{\text{homogène}} = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}$

  avec : $\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

- $\Delta = 0$: une racine double réelle r.

  La solution est alors : $f(t)_{\text{homogène}} = (A \cdot t + B) \cdot e^{r \cdot t}$

  avec : $r = -\dfrac{b}{2a}$

- $\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées : $r = \alpha \pm \beta j$

  La solution est alors : $f(t)_{\text{homogène}} = e^{\alpha \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\beta \cdot t) + B \cdot \sin(\beta \cdot t)]$

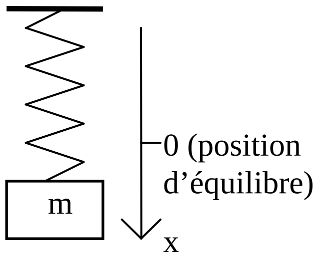
  avec : $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$

A et B sont deux constantes réelles qui dépendent des conditions initiales.

b) Recherche d'une solution particulière de l'équation : $a \cdot f''(t) + b \cdot f'(t) + c \cdot f(t) = g(t)$

II-2- Exemple de résolution : oscillation mécanique

Considérons une masse m suspendue à un ressort de constante de raideur k.
x désigne la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre.
Le frottement est supposé proportionnel à la vitesse $v = x'(t)$.
λ est le coefficient de frottement ($\lambda > 0$)



Les lois de la Mécanique du mouvement nous indiquent que : $m \cdot x''(t) + \lambda \cdot x'(t) + k \cdot x(t) = 0$

- Résolution de l'équation différentielle :

Equation caractéristique : $m \cdot r^2 + \lambda \cdot r + k = 0$

Discriminant : $\Delta = \lambda^2 - 4mk$

Si le coefficient de frottement λ est suffisamment faible, nous sommes dans le cas $\Delta < 0$ et nous avons deux racines complexes conjuguées :

$$r = -\frac{\lambda}{2m} \pm j\frac{\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m}$$

Solution générale :

$$x(t) = e^{-\frac{\lambda}{2m} \cdot t} \cdot \left[A \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m} \cdot t \right) + B \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m} \cdot t \right) \right]$$

- Conditions initiales :

A l'instant t = 0, on pousse la masse vers le bas à la vitesse v (la masse étant initialement dans sa position d'équilibre) :

$x(t = 0) = 0$
et $x'(t = 0) = v$

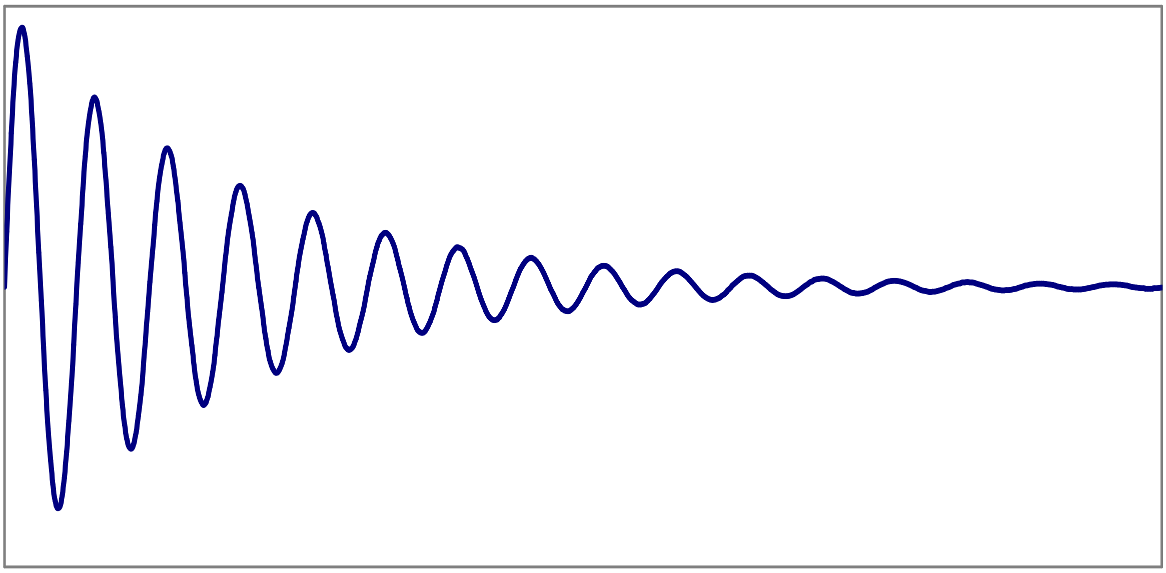
d'où : A = 0

$$\text{et } B = \frac{2mv}{\sqrt{4mk - \lambda^2}}$$

En définitive :
$$\boxed{x(t) = \frac{2mv}{\sqrt{4mk - \lambda^2}}\, e^{-\frac{\lambda}{2m}\cdot t} \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m} \cdot t\right)}$$

Il s'agit d'un mouvement oscillatoire amorti (la masse retrouve sa position d'équilibre après une série d'oscillations) :

x(t)



(C) Fabrice Sincère